۴ـ میانگین همساز، اگر هیچ‌کدام از داده‌ها صفر نباشند، میانگین همساز یا هارمونیک یا توافقی، از فرمول زیر محاسبه می‌شود[۱].

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}} \qquad (7)$$

از این میانگین در مواردی استفاده می‌شود که باید میانگین نسبت‌هایی را محاسبه کرد که صورت و مخرج آن‌ها دارای مقیاس یکسان نیستند ولی صورت نسبت‌ها مساوی هستند و اگر مخرج نسبت‌ها مساوی باشند باید از میانگین حسابی استفاده کرد. این میانگین معمولاً برای محاسبه حد متوسط سرعت‌ها، مطالعه در شبکه‌های برق و عینک‌شناسی به‌کار می‌رود.

اگر داده‌ها گروه‌بندی شده‌باشند میانگین همساز از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} f_i/x_i} \quad \text{و} \quad x_i \neq 0} \qquad (8)$$

که در آن x_i نماینده طبقه و f_i فراوانی طبقه است.

مثال ۱.۱۰. اتومبیلی فاصله بین دو شهر A و B را که ۹۰ کیلومتر است با سرعت متوسط ۶۰ کیلومتر در ساعت پیموده است و با سرعت متوسط ۳۰ کیلومتر در ساعت همین مسیر را برگشته است، سرعت متوسط در رفت و برگشت را محاسبه کنید.

حل: ابتدا مسئله را از رابطه فیزیکی حل می‌کنیم تا جواب صحیح را پیدا کنیم، این اتومبیل ۱/۵ ساعت زمان رفت و ۳ ساعت زمان برگشت داشته یعنی ۴/۵ ساعت در راه بوده و ۱۸۰ کیلومتر مسافت را پیموده است پس سرعت متوسط آن برابر است با:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{۱۸۰}{۴/۵} = ۴۰ Km/h$$

اگر از میانگین حسابی استفاده کنیم $۴۵ = \frac{۶۰ + ۳۰}{۲} = \bar{x}$ و اگر از میانگین همساز استفاده کنیم

$$H = \frac{۲}{\frac{۱}{۶۰} + \frac{۱}{۳۰}} = \frac{۱۲۰}{۳} = ۴۰$$

ملاحظه می‌کنید که باید از میانگین همساز استفاده کنیم، علت آن است که می‌خواهیم سرعت متوسط را حساب کنیم، یعنی نسبت مسافت پیموده شده به زمان، به‌عبارت دیگر می‌خواهیم میانگین نسبت‌هایی را محاسبه کنیم که به فرم $\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ هستند و صورت و مخرج آن‌ها دارای مقیاس یکسان نیست و چون در این مثال صورت‌ها مساوی است، می‌بایست از میانگین همساز استفاده می‌کردیم. اگر صورت مثال را تغییر دهیم بدین ترتیب که اتومبیل نصف مدت حرکت را با سرعت متوسط ۶۰ کیلومتر در ساعت و نصف مدت دیگر را با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت پیموده است، سرعت متوسط در رفت و برگشت را حساب می‌کنیم، در این حالت از فرمول $x = vt$ داریم:

$$۱۸۰ = ۶۰ \times \frac{t}{۲} + ۳۰ \times \frac{t}{۲} = ۴۵t \ , \quad t = ۴$$

بنابراین کل زمان برابر با ۴ ساعت است و چون ۱۸۰ کیلومتر پیموده شده پس سرعت متوسط برابر با ۴۵ کیلومتر در ساعت می‌شود و ملاحظه می‌کنید که در این حالت میانگین حسابی جواب‌گو است. علت آن است که میانگین نسبت‌هایی را حساب کرده‌ایم که در صورت و مخرج مقیاس یکسان ندارند ولی مخرج‌ها مساوی هستند. □

محاسبه میانه در داده‌های طبقه‌بندی شده

ابتدا طبقه میانه‌دار را مشخص می‌کنیم بدین‌ترتیب که عدد $\frac{n}{۲}$ را با ستون فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم، اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{n}{۲}$ باشد طبقه میانه‌دار است، سپس از فرمول زیر میانه را محاسبه می‌کنیم[۱]:

$$\boxed{M_d = L + \frac{\frac{n}{۲} - F_C}{f} \times C} \qquad (۱۱)$$

که در آن : Lـ کرانه پائین طبقه میانه‌دار F_Cـ فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه میانه‌دار

fـ فراوانی طبقه میانه‌دار Cـ فاصله طبقات

مثال ۱۴.۱. جدول فراوانی زیر مربوط به برق مصرفی ۲۵ خانوار است، میانه را تعیین کنید.

جدول شماره (۳)

حدود طبقات	f	F_C
۱۰۰_۱۰۹	۳	۳
۱۱۰_۱۱۹	۵	۸
۱۲۰_۱۲۹	۴	۱۲
۱۳۰_۱۳۹	۷	۱۹
۱۴۰_۱۴۹	۶	۲۵

حل: ابتدا ستون مربوط به فراوانی تجمعی را تشکیل می‌دهیم، عدد $۱۲/۵ = \frac{۲۵}{۲}$ را با ستون مربوط به فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم، چون اولین عددی که بزرگ‌تر یا مساوی ۱۲/۵ است، عدد ۱۹ است، پس طبقه چهارم، طبقه میانه‌دار است حال با توجه به فرمول (۱۱) داریم:

$$M_d = ۱۲۹/۵ + \frac{۱۲/۵ - ۱۲}{۷} \times ۱۰ = ۱۳۰/۲۱ \qquad \square$$

می‌توان از روش ترسیمی برای محاسبه میانه استفاده نمود. بدین ترتیب که منحنی فراوانی تجمعی را رسم کرده و چون میانه طول نقطه‌ای است که فراوانی تجمعی آن $\frac{n}{۲}$ است پس کافی است روی محور فراوانی تجمعی نقطه $\frac{n}{۲}$ را مشخص کرده و خطی موازی محور xها رسم کنیم تا منحنی را قطع نماید، سپس طول این نقطه را تعیین کنیم.

پ) مد یا نما اندازه‌ای از متغیر است که فراوانی آن ماکسیمم باشد، البته اگر داده‌ها جدا باشند و اگر متغیر پیوسته باشد، مد طول نقطه ماکسیمم منحنی فراوانی است و آن را با نماد M_o نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۱۵. مطلوب است محاسبه مد در داده‌های زیر

الف) ۶ . ۷ , ۴ , ۷ . ۵ , ۳

ب) ۶ , ۶ , ۷ , ۷ , ۴ , ۵ , ۵ , ۳

پ) ۶ , ۷ , ۴ , ۵ , ۳

حل: الف) چون عدد ۷ بیش‌تر از اعداد دیگر تکرار شده، لذا $M_o = ۷$

ب) اعداد ۶، ۷، ۵ دارای فراوانی ماکسیمم هستند پس ۳ مد داریم $M_o = ۵ \ , \ ۷ \ , \ ۶$

پ) چون فراوانی تمام اعداد یکسان است پس مد نداریم. □

محاسبه مد در داده‌های گروه‌بندی شده

ابتدا طبقه مد دار را مشخص می‌کنیم بدین ترتیب که طبقه‌ای که فراوانی آن ماکسیمم باشد را طبقه مد دار می‌نامیم، سپس از فرمول زیر مد را حساب می‌کنیم.

$$M_o = L + \frac{d_۱}{d_۱ + d_۲} \times C \qquad (۱۲)$$

در این فرمول:

Lـ کرانه پائین طبقه مددار

$d_۱$ـ تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه قبل

$d_۲$ـ تفاضل فراوانی طبقه مد دار از فراوانی طبقه بعد

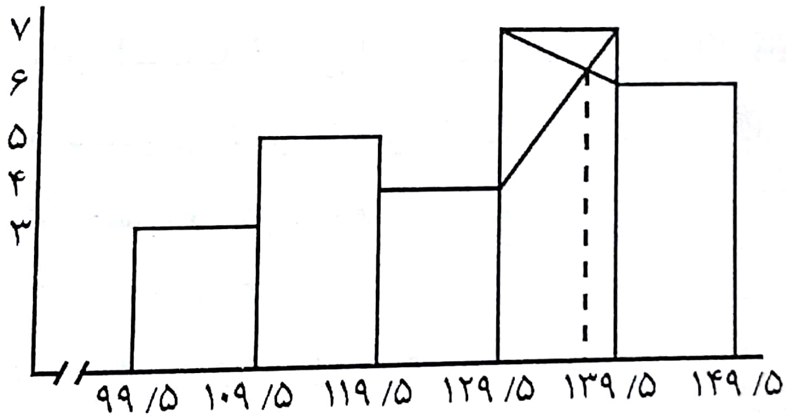
Cـ فاصله طبقات

مثال ۱.۱۶. مطلوب است محاسبه مد در جدول شماره (۳)

حل: چون فراوانی طبقه چهارم از فراوانی بقیه طبقات بیش‌تر است پس طبقه چهارم، طبقه مد دار است و با توجه به فرمول (۱۲) داریم:

$$\square \qquad M_o = ۱۲۹/۵ + \frac{۳}{۳+۱} \times ۱۰ = ۱۳۷$$

مد را از روش ترسیمی نیز می‌توان محاسبه نمود، برای این منظور هیستوگرام فراوانی را رسم نموده و سپس مطابق شکل زیر، مد را تعیین می‌کنیم، نمودار زیر مربوط به جدول شماره (۳) است.



تذکر: وجود بیش از یک مد می‌تواند نشان دهنده ناهمگن بودن داده‌های آماری و یا طبقه‌بندی نامناسب آن‌ها باشد که در این مورد بهتر است در طبقه‌بندی تجدید نظر شود.

۵.۱. چندک‌ها

هرگاه داده‌ها را به‌طور غیر نزولی مرتب کنیم، عددی را که لااقل $100p$ درصد داده‌های مرتب شده کوچک‌تر از آن و $(1-p)\ 100$ درصد داده‌ها بزرگ‌تر از آن باشند را صدک $100p$ام می‌نامیم $(0 < p < 1)$.

چندک‌ها کلی‌تر از میانه هستند و صدک ۵۰ام میانه است. چندک‌های معروف عبارتند از:

الف) چارک‌ها که به ازای ۰/۷۵ و ۰/۵۰ و $p = 0/25$ به‌دست می‌آیند و آن‌ها را با

$$Q_1 \text{ و } Q_2 \text{ و } Q_3$$

نشان می‌دهیم. (Q_2 همان میانه است.)

ب) دهک‌ها که به ازای ۰/۹ و $\cdots$ و ۰/۲ و $p = 0/1$ به‌دست می‌آیند و آن‌ها را با

$$D_1 \text{ و } D_2 \text{ و } \cdots \text{ و } D_9$$

نشان می‌دهیم. (D_5 همان میانه است.)

پ) صدک‌ها که به ازای ۰/۹۹ و $\cdots$ و ۰/۰۲ و $p = 0/01$ به‌دست می‌آیند و آن‌ها را با

$$P_1 \text{ و } P_2 \text{ و } \cdots \text{ و } P_{99}$$

نشان می‌دهیم.

تذکر: $P_{25} = Q_1$ و $P_{20} = D_2$ و مثلاً $P_{50} = D_5 = Q_2 = M_d$

روش محاسبه صدک‌ها در داده‌های جدا

فرض کنید n داده داریم و آن‌ها را به‌طور غیر نزولی مرتب کرده‌ایم، برای محاسبه صدک $100p$ام، ابتدا $(n+1)p$ را حساب می‌کنیم، اگر برابر عدد صحیح مانند k باشد در این صورت x_k (عدد kام) جواب مطلوب است و اگر $(n+1)p$ عدد صحیح نباشد داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} &(n+1)p = k + r \quad \text{و} \quad 0 < r < 1 \\ &\text{صدک}\ 100p\text{ام} = (1-r)x_k + r x_{k+1} \end{aligned}} \qquad (1)$$

مثال ۱۹.۱. در داده‌های زیر، محاسبه چارک اول، دهک ششم، میانه و صدک ۶۳ام را تعیین کنید.

۳	۴	۵	۵	۶	۷	۷	۹	۹	۹
۱۱	۱۲	۱۴	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	

حل: برای محاسبه چارک اول $Q_۱ = P_{۲۵}$

$$(n+۱)p = (۱۹+۱)\frac{۲۵}{۱۰۰} = ۵$$

و چون عدد صحیح است پس $Q_۱$ برابر عدد پنجم یعنی ۶ است، $Q_۱ = ۶$ و برای محاسبه دهک ششم

$$(n+۱)p = (۱۹+۱)\frac{۶}{۱۰} = ۱۲$$

پس، $D_۶ = x_{۱۲} = ۱۲$ (عدد دوازدهم). و برای محاسبه میانه

$$(n+۱)p = (۱۹+۱)\frac{۵}{۱۰} = ۱۰$$

پس، $M_d = x_{۱۰} = ۹$. و برای محاسبه صدک ۶۳ام

$$\begin{aligned}(n+۱)p &= (۱۹+۱)\frac{۶۳}{۱۰۰} = ۱۲/۶ = ۱۲ + ۰/۶ \\ P_{۳۶} &= (۱-۰/۶)x_{۱۲} + ۰/۶x_{۱۳} \\ &= ۰/۴ \times ۱۲ + ۰/۶ \times ۱۴ = ۱۳/۲\end{aligned}$$

□

روش محاسبه صدک‌ها در داده‌های گروه‌بندی شده

روش محاسبه کاملاً مشابه روش محاسبه میانه است و برای محاسبه صدک $۱۰۰p$ام، عدد $n \times p$ را با ستون فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم، اولین طبقه‌ای که فراوانی تجمعی آن بزرگ‌تر یا مساوی $n \times p$ باشد، طبقه صدک $۱۰۰p$ام است و

$$\boxed{\text{صدک}\ ۱۰۰p\text{ام} = L + \frac{np - F_c}{f} \times C} \qquad (۲)$$

که در آن: L– کرانه پائین طبقه صدک $۱۰۰p$ام

F_c– فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه صدک $۱۰۰p$ام

f– فراوانی طبقه $۱۰۰p$ام

C– فاصله طبقات

مثال ۱.۲۰. در جدول توزیع فراوانی زیر، مطلوب است محاسبه چارک اول، دهک هفتم، صدک ۴۳ام:

حدود طبقات	f_i	F_{ci}
۲۰ ـ ۲۴	۳	۳
۲۵ ـ ۲۹	۴	۷
۳۰ ـ ۳۴	۲	۹
۳۵ ـ ۳۹	۵	۱۴
۴۰ ـ ۴۴	۸	۲۲
۴۵ ـ ۴۹	۳	۲۵
	۲۵	

حل: ابتدا ستون مربوط به فراوانی تجمعی را تشکیل می‌دهیم، برای محاسبه چارک اول

$$n \times p = ۲۵ \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۶/۲۵$$

پس چارک اول در طبقه دوم قرار دارد و با توجه به فرمول (۲) داریم:

$$Q_۱ = ۲۴/۵ + \frac{۶/۲۵ - ۳}{۴} \times ۵ = ۲۸/۵۶۲۵$$

و برای محاسبه $D_۷$، عدد $n \times p = ۲۵ \times \frac{۷}{۱۰} = ۱۷/۵$ را با ستون فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم، $D_۷$ در طبقه پنجم قرار دارد، پس:

$$D_۷ = ۳۹/۵ + \frac{۱۷/۵ - ۱۴}{۸} \times ۵ = ۴۱/۶۸۷۵$$

برای محاسبه $P_{۴۳}$، عدد $n \times p = ۲۵ \times \frac{۴۳}{۱۰۰} = ۱۰/۷۵$ را با ستون فراوانی تجمعی مقایسه می‌کنیم، $P_{۴۳}$ در طبقه چهارم قرار دارد، لذا:

$$P_{۴۳} = ۳۴/۵ + \frac{۱۰/۷۵ - ۹}{۵} \times ۵ = ۳۶/۲۵ \qquad \square$$

۶.۱. پارامترهای پراکندگی

در بخش‌های قبل در مورد پارامترهای مرکزی صحبت کردیم ولی این پارامترها به‌تنهایی نمی‌توانند مشخص کننده یک بخش باشند، مثلاً فرض کنید طول عمر باتری‌های ساخته شده توسط دو کارخانه، داده‌های زیر باشند:

کارخانه اول ۱۰۰ , ۱۰۲ , ۱۰۳ , ۱۰۵ , ۱۰۷ , ۱۰۷ , ۱۱۱

کارخانه دوم ۹۶ , ۱۰۰ , ۱۰۴ , ۱۰۵ , ۱۰۷ , ۱۰۷ , ۱۱۶

در این دو نمونه داریم:

کارخانه اول $M_d = ۱۰۵ \ , \ M_o = ۱۰۷ \ , \ \bar{x} = ۱۰۵$

کارخانه دوم $M_d = ۱۰۵ \ , \ M_o = ۱۰۷ \ , \ \bar{x} = ۱۰۵$

ملاحظه می‌شود که میانه و میانگین و مد در هر دو نمونه برابر هستند، ولی دامنه اولی $۱۱ = ۱۰۰ - ۱۱۱$ و دامنه دومی $۲۰ = ۹۶ - ۱۱۶$ است و این نشان می‌دهد که پراکندگی داده‌ها در اطراف میانگین برای اولی کم‌تر از دومی است (این نشان می‌دهد که محصولات کارخانه اول بهتر از محصولات کارخانه دوم است) در حالی که پارامترهای مرکزی این اختلاف را نشان نمی‌دهند، لذا برای آن‌که تصور بهتری از چگونگی توزیع داشته باشیم باید پارامترهای پراکندگی را نیز مورد مطالعه قرار دهیم. ذیلاً پارامترهای پراکندگی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

الف) دامنه. یا دامنه تغییرات[1] عبارت است از اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده:

$$\boxed{R = \text{بزرگ‌ترین داده} - \text{کوچک‌ترین داده}}$$

ب) انحراف چارک‌ها یا نیم دامنه چارک‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{Q = \frac{۱}{۲}(Q_۳ - Q_۱)} \qquad (۱)$$

برتری این پارامتر نسبت به دامنه آن است که دامنه وضع دو داده بزرگ و کوچک را بیان می‌کند، در حالی که $Q_۳ - Q_۱$ شامل ۵۰٪ داده‌های متوسط است[2].

پارامترهایی راکه معرفی کردیم هر دو دارای این عیب هستند که برکلیه داده‌ها متکی نیستند، حال می‌خواهیم پارامتری را معرفی کنیم که این عیب را نداشته باشد. یک پارامتر خوب می‌تواند میانگین انحراف داده‌ها از میانگین باشد، یعنی انحراف هر یک از داده‌ها را از میانگین پیدا می‌کنیم $d_i = x_i - \bar{x}$ و سپس میانگین این انحراف‌ها را به‌دست آوریم، ولی واضح است که حاصل جمع انحراف‌ها صفر است زیرا

$$\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=۱}^{n} x_i - \sum_{i=۱}^{n} \bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = ۰$$

لذا دو کار می‌توان انجام داد، یکی آن‌که میانگین قدرمطلق این انحراف‌ها را حساب کرد و دیگری آن‌که میانگین مربع انحراف‌ها را حساب کرد.

پ) انحراف متوسط یا انحراف از میانگین به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

داده‌گروه‌بندی نشده

$$\boxed{A \cdot D = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} x_i - \bar{x}} \qquad (۲)$$

داده‌های گروه‌بندی شده

$$\boxed{A \cdot D = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i(|x_i - \bar{x}|)} \qquad (۳)$$

که در آن x_i نماینده و f_i فراوانی و $\bar{x}$ میانگین محاسبه شده از جدول هستند و چنانچه از روش کد گذاری استفاده کنیم:

$$(A{\cdot}D)_X = C(A{\cdot}D)_U \qquad (۴)$$

که در آن C فاصله طبقات است.

ت) واریانس و انحراف معیار، میانگین مربع انحراف داده‌ها از میانگین را واریانس می‌نامیم و از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

واریانس نمونه

$$\boxed{S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲} \qquad (۵)$$

و اگر داده‌ها گروه‌بندی شده باشند

$$S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^۲ \qquad (۶)$$

جذر مثبت واریانس را **انحراف معیار** یا **انحراف استاندارد** می‌نامیم.

انحراف معیار نمونه

$$S = \sqrt{\text{واریانس}} \qquad (۷)$$

چنانچه از روش کدگذاری استفاده کنیم

$$S_X^۲ = C^۲ S_U^۲ \quad \text{و} \quad S_X = C S_U \tag{۸}$$

اثبات به‌عهده دانشجویان (تمرین شماره ۷.)

توجه: چنانچه مطالعه روی جامعه باشد، در این صورت میانگین را با μ و واریانس را با $\sigma^۲$ نشان می‌دهیم و داریم:

(واریانس)
$$\sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \mu)^۲ \tag{۹}$$

$$\sigma^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{k} f_i(x_i - \mu)^۲ \tag{۱۰}$$

(انحراف معیار)
$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}} \tag{۱۱}$$

تذکر: فرض کنید داده‌ها مربوط به طول قد افراد برحسب سانتی‌متر باشند، چون واحد $\bar{x}$ هم سانتی‌متر است لذا واحد $d_i = x_i - \bar{x}$ نیز سانتی‌متر است ولی واحد $(x_i - \bar{x})^۲$ سانتی‌متر مربع است، لذا واحد واریانس برحسب سانتی‌متر مربع است ولی واحد انحراف معیار همان سانتی‌متر (واحد اندازه‌گیری) است، بدین جهت انحراف معیار به‌عنوان بهترین پارامتر پراکندگی معرفی می‌شود.

تذکر: فرمول‌های زیر، محاسبه واریانس را ساده‌تر می‌کند (به‌خصوص در مواردی که $\bar{x}$ اعشاری باشد)

$$\boxed{S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\Big(\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲ - n\bar{x}^۲\Big)} \tag{۱۲}$$

$$\boxed{S^۲ = \frac{۱}{n-۱}\Big(\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i^۲ - \frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{k} f_i x_i)^۲\Big)} \tag{۱۳}$$

اثبات به‌عنوان تمرین به‌عهده دانشجویان است.

برای مقایسه پراکندگی دو جمعیت از **ضریب تغییرات** استفاده می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\boxed{C \cdot V = \frac{\sigma}{\mu} \times ۱۰۰\%} \tag{۱۴}$$

مثال ۲۲.۱. انحراف متوسط داده‌های زیر را به‌دست آورید.

۲ , ۳ , ۶ , ۸ , ۱۱

حل:

$$\bar{x} = \frac{۱}{۵}(۲ + ۳ + ۶ + ۸ + ۱۱) = ۶$$

$$A \cdot D = \frac{۱}{۵}(|۲ - ۶| + |۳ - ۶| + |۶ - ۶| + |۸ - ۶| + |۱۱ - ۶|)$$

$$= \frac{۱}{۵}(۴ + ۳ + ۰ + ۲ + ۵) = ۲/۸ \quad \square$$

مثال ۲۳.۱. مطلوب است محاسبه انحراف متوسط در جدول فراوانی زیر.

حدود طبقات	f_i
۶۰ ـ ۶۲	۵
۶۳ ـ ۶۵	۱۸
۶۶ ـ ۶۸	۴۲
۶۹ ـ ۷۱	۲۷
۷۲ ـ ۷۴	۸

حل: ابتدا میانگین را محاسبه نموده و سپس از فرمول (۳) استفاده می‌کنیم.

f_i	x_i	U_i	f_iU_i	$\lvert d_i\rvert = \lvert U_i - \bar{U}\rvert$	$f_i\lvert d_i\rvert$
۵	۶۱	-۲	-۱۰	۲/۱۵	۱۰/۷۵
۱۸	۶۴	-۱	-۱۸	۱/۱۵	۲۰/۷
۴۲	۶۷	۰	۰	۰/۱۵	۶/۳
۲۷	۷۰	۱	۲۷	۰/۸۵	۲۲/۹۵
۸	۷۳	۲	۱۶	۱/۸۵	۱۴/۸
۱۰۰			۱۵		۷۵/۵

$$\bar{U} = \frac{۱}{n}\sum f_iU_i = \frac{۱۵}{۱۰۰} = ۰/۱۵$$

$$(A \cdot D)_U = \frac{۱}{n}\sum f_i|d_i| = \frac{۷۵/۵}{۱۰۰} = ۰/۷۵۵$$

$$(A \cdot D)_X = C(A \cdot D)_U = ۳ \times (۰/۷۵۵) = ۲/۲۶۵ \quad \square$$

مثال ۲۴.۱. جدول توزیع فراوانی برق مصرفی ۲۰ خانوار مفروض است،

مطلوب است محاسبهٔ:

الف) انحراف چارک‌ها

ب) واریانس

پ) انحراف معیار

ت) ضریب تغییرات

حدود طبقات	f_i
۱۰ – ۱۴	۳
۱۵ – ۱۹	۵
۲۰ – ۲۴	۶
۲۵ – ۲۹	۲
۳۰ – ۳۴	۴

حل:

حدود واقعی	f_i	x_i	F_{ci}	U_i	f_iU_i	$f_iU_i^۲$
۹٫۵ − ۱۴٫۵	۳	۱۲	۳	−۲	−۶	۱۲
۱۴٫۵ − ۱۹٫۵	۵	۱۷	۸	−۱	−۵	۵
۱۹٫۵ − ۲۴٫۵	۶	۲۲	۱۴	۰	۰	۰
۲۴٫۵ − ۲۹٫۵	۲	۲۷	۱۶	۱	۲	۲
۲۹٫۵ − ۳۴٫۵	۴	۳۲	۲۰	۲	۸	۱۶
	۲۰				−۱	۳۵

الف) ابتدا چارک اول را محاسبه می‌کنیم،

$$n \times p = ۲۰ \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = ۵$$

$$Q_۱ = L + \frac{np - Fc}{f_i} \times C = ۱۴٫۵ + \frac{۵ - ۳}{۵} \times ۵ = ۱۶٫۵$$

و به‌طور مشابه $Q_۳$ را محاسبه می‌کنیم، $n \times p = ۱۵$ و

$$Q_۳ = ۲۴٫۵ + \frac{۱۵ - ۱۴}{۲} \times ۵ = ۲۷$$

و با توجه به فرمول (۱)

$$Q = \frac{۱}{۲}(۲۷ - ۱۶٫۵) = ۵٫۲۵$$

ب) ابتدا با توجه به فرمول (۱۳)، واریانس نمونه را برای متغیر U محاسبه می‌کنیم.

$$S_U^۲ = \frac{۱}{n - ۱}\Big(\sum_{i=۱}^{k} f_i u_i^۲ - \frac{۱}{n}(\sum_{i=۱}^{k} f_i u_i)^۲\Big) = \frac{۱}{۱۹}\Big(۳۵ - \frac{۱}{۲۰}(-۱)^۲\Big) = \frac{۶۹۹}{۳۸۰}$$

با استفاده از فرمول (۸) داریم:

$$S_X^۲ = C^۲ S_U^۲ \Rightarrow S_X^۲ = ۲۵ \times \frac{۶۹۹}{۳۸۰}$$

پ) انحراف معیار نمونه

$$S = \sqrt{S^۲} = ۵ \times ۱٫۳۵۶ = ۶٫۷۸۱$$

ت) ابتدا میانگین نمونه را محاسبه می‌کنیم

$$\bar{U} = \frac{۱}{n}\sum f_i U_i = -\frac{۱}{۲۰}$$

$$\bar{x} = A + C\bar{U} = ۲۲ + (-\frac{۱}{۲۰}) \times ۵ = ۲۱٫۷۵$$

با استفاده از فرمول (۱۴) داریم[۱]:

$$\square \quad C \cdot V = \frac{S}{x} \times ۱۰۰ = \frac{۶/۷۸۱}{۲۱/۷۵} \times ۱۰۰ = ۳۱/۱۸٪$$

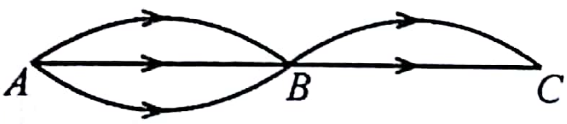
بخش ۳.۲. آنالیز ترکیبی (شمارش نقاط فضای نمونه و پیشامد)

از مسائلی که در یک آزمایش مورد توجه قرار می‌گیرد، کوشش در ارزیابی عوامل شانس در به‌وقوع پیوستن پیشامدهای موردنظر است. چون این مسئله به نظریه احتمال مربوط می‌شود و در بخش‌های بعد بحث خواهد شد، در این بخش مطالبی را که در این نظریه مورد استفاده قرار خواهد گرفت، مورد بحث قرار می‌دهیم. یکی از مهم‌ترین آن‌ها، مشخص کردن تعداد عضوهای فضای نمونه و تعداد عضوهای یک پیشامد است ، به‌عبارت دیگر در بسیاری از موارد نیازی به مشخص نمودن فضای نمونه و پیشامد نبوده و کافی است تعداد عضوهای آن‌را مشخص کنیم. در زیر قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که به‌شمارش نقاط فضای نمونه و پیشامد، کمک زیادی خواهد کرد.

قضیه ۱.۲. (اصل اساسی شمارش)

اگر عملی را به $m_{۱}$ طریق و برای هر کدام از آن‌ها عمل دیگری را به $m_{۲}$ طریق بتوان انجام داد، این دو عمل را با هم (به‌طور هم‌زمان) به $m_{۱} \times m_{۲}$ طریق می‌توان انجام داد.

به‌عنوان مثال، اگر برای رفتن از شهر A به شهر B سه جاده و برای رفتن از شهر B به شهر C دو جاده وجود داشته باشد، آن‌گاه برای رفتن از شهر A به شهر C، ۶ جاده وجود دارد.



$$۳ \times ۲ = ۶$$

۱۵

قضیه بالا را می‌توان برای تعداد دلخواهی از پیشامدها تعمیم داد.

قضیه ۲.۲ (تعمیم اصل اساسی شمارش)

اگر عملی را به $m_{۱}$ طریق و برای هر کدام از آن‌ها عمل دیگری را به $m_{۲}$ طریق و برای هر یک از این دو عمل سومی را به $m_{۳}$ طریق و $\cdots$ و عمل kامی را به m_k طریق بتوان انجام داد، آن‌گاه این k عمل را با هم به $m_{۱} \times m_{۲} \times \cdots \times m_k$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال ۲۱.۲. یک سکه را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم، فضای نمونه این آزمایش دارای چند نقطه نمونه است.

حل: چون هر یک از پرتاب‌ها دو نتیجه دارد، با توجه به قضیه ۲.۲. داریم:

$$۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^{۳} = ۸$$

و یا $S = \{HHH , HTH , HHT , THH , HTT , THT , TTH , TTT\}$ □

تذکر: اگر سه سکه را با هم یک مرتبه پرتاب کنیم، فضای نمونه آن با وقتی که یک سکه را سه مرتبه پرتاب کنیم تفاوتی ندارد. (چرا؟)

مثال ۲۲.۲. دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش چند نقطه نمونه دارد. **ب)** نقاط نمونه را مشخص کنید.

حل: الف) چون تاس اول به ۶ صورت روی زمین قرار می‌گیرد و برای هر کدام از این صورت‌های متفاوت، تاس دوم نیز به شش صورت روی زمین قرار می‌گیرد، لذا فضای نمونه $۶ \times ۶ = ۳۶$ نقطه نمونه دارد.

ب)

$$\begin{matrix} (۱,۶) & (۱,۵) & (۱,۴) & (۱,۳) & (۱,۲) & (۱,۱) \\ (۲,۶) & (۲,۵) & (۲,۴) & (۲,۳) & (۲,۲) & (۲,۱) \\ (۳,۶) & (۳,۵) & (۳,۴) & (۳,۳) & (۳,۲) & (۳,۱) \\ (۴,۶) & (۴,۵) & (۴,۴) & (۴,۳) & (۴,۲) & (۴,۱) \\ (۵,۶) & (۵,۵) & (۵,۴) & (۵,۳) & (۵,۲) & (۵,۱) \\ (۶,۶) & (۶,۵) & (۶,۴) & (۶,۳) & (۶,۲) & (۶,۱) \end{matrix} \quad \square$$

تذکر: ملاحظه می‌کنید که در مثال بالا، عضوهای مجموعه S، زوج‌های مرتب (x,y) هستند که در آن x عدد روی تاس اول و y عدد روی تاس دوم را نشان می‌دهد. حال اگر دو تاس قرمز و سبزرنگ را با هم پرتاب کنیم، نتیجه حاصل به‌همین صورت است با این تفاوت که در این حالت، مؤلفه اول زوج مرتب (x,y) عدد نوشته شده روی تاس قرمز (یا سبز) و مؤلفه دوم این زوج‌های مرتب، عدد نوشته شده روی تاس سبز (یا قرمز) را نشان می‌دهد.

مثال ۲۳.۲. چند عدد سه رقمی از ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ می‌توان نوشت به‌طوری‌که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد.

ب) ارقام تکرار نشوند.

پ) در حالت «ب» چند عدد زوج و چند عدد فرد هستند.

حل: الف) چون عدد سه رقمی است و ارقام می‌توانند تکرار شوند، برای انتخاب ارقام یکان، دهگان و صدگان آن هر پنج رقم قابل استفاده هستند، در نتیجه با استفاده از قضیه ۲.۲. داریم:

$$۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۳ = ۱۲۵$$

یعنی ۱۲۵ عدد سه رقمی می‌توان نوشت.

ب) چون در این حالت ارقام تکرار نمی‌شوند، بنابراین برای رقم یکان ۵ انتخاب و برای رقم دهگان ۴ انتخاب و برای رقم صدگان ۳ انتخاب وجود دارد، در نتیجه $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$
یعنی ۶۰ عدد سه رقمی می‌توان نوشت به‌گونه‌ای که ارقام آن تکرار نشوند.
پ) چون می‌خواهیم عدد انتخاب شده زوج باشد، بنابراین رقم یکان آن فقط باید عدد ۲ یا ۴ باشد، پس برای رقم یکان ۲ انتخاب و برای رقم دهگان ۴ انتخاب و برای رقم صدگان ۳ انتخاب وجود دارد، لذا

$$۲ \times ۴ \times ۳ = ۲۴$$

عدد سه رقمی می‌توان نوشت که همگی زوج باشند و ارقام تکرار نشوند و $۶۰ - ۲۴ = ۳۶$ عدد سه رقمی می‌توان نوشت که فرد باشند. □
تذکر: اگر به مثال بالا به‌صورت یک آزمایش آماری توجه کنیم، قسمت الف به‌عنوان فضای نمونه و قسمت‌های «ب» و «پ» به‌عنوان پیشامدهای آن هستند.
چون در بسیاری از آزمایش‌ها غالباً فضای نمونه‌ای نشان‌دهنده تمامی ترتیب‌های ممکن n شیء یا قسمتی از آن n شیء است ، لذا در این قسمت سعی می‌کنیم تعداد حالت‌های مختلف ترتیب قرارگرفتن اشیاء را در یک ردیف و یا تعداد حالت‌های مختلفی که می‌توان گروهی از اشیاء را انتخاب کرد، مورد بررسی قرار دهیم.
تعریف ۲.۱۶. تمام ترتیب‌های ممکن دسته‌ای از اشیاء و یا قسمتی از آن را **تبدیل (جای‌گشت[1])** می‌گوییم.
سه حرف a و b و c را درنظر می‌گیریم، تعداد تبدیل‌های این سه حرف عبارت‌اند از:

$$abc\ ,\ acb\ ,\ bac\ ,\ bca\ ,\ cab\ ,\ cba$$

بنابراین برای سه حرف a و b و c، ۶ تبدیل مختلف وجود دارد. حال می‌خواهیم نشان دهیم که بدون نوشتن تبدیل‌های مختلف می‌توان تعداد آن‌ها را تعیین کرد.
قضیه ۳.۲. تعداد تبدیل‌های n شیء متمایز برابر با $n!$ است.
اثبات: فرض کنید n محل خالی داریم و می‌خواهیم با n شیء متمایز، این n محل را پر کنیم. محل اول را با هر یک از n شیء می‌توان پر نمود، محل خالی دوم را با $n - ۱$ شیء و $\cdots$ به‌همین ترتیب محل خالی آخر را با یک شیء باقی مانده می‌توان پر کرد.

n	$n-۱$	$n-۲$	$\cdots$	$\cdots$	۲	۱

با استفاده از قضیه ۲.۲. این n عمل (پر کردن n محل خالی) را به‌طور هم‌زمان به تعداد

$$n(n-۱)(n-۲)\cdots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

می‌توان انجام داد، حاصل‌ضرب فوق را با نماد $n!$ نشان می‌دهیم و آن را «فاکتوریل» می‌خوانیم[۱].

$$n! = n(n-۱)\cdots ۳\times ۲\times ۱ \qquad \circ \qquad (۱)$$

مثال ۲۴.۲. به چند طریق می‌توان یک صف ۵ نفری برای سوار شدن به اتوبوس تشکیل داد؟

حل: با استفاده از قضیه ۳.۲. داریم:

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲۰ \qquad \square$$

مثال ۲۵.۲. به چند طریق می‌توان سه توپ مختلف را درون سه جعبه قرار داد، به طوری که:

الف) محدودیتی وجود نداشته باشد.

ب) در هر جعبه بیش از یک توپ قرار نگیرد.

حل: الف) چون محدودیتی وجود ندارد، توپ اول را درون هر جعبه می‌توان قرار داد و به‌همین ترتیب توپ دوم و سوم را درون هر جعبه می‌توان قرار داد، بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۲. داریم:

$$۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۳ = ۲۷$$

باید توجه داشت که چون این تعداد، تمام حالت‌های ممکن را نشان می‌دهد، داریم: $n(S) = ۲۷$

ب) چون در هر جعبه بیش از یک توپ نمی‌توان قرار داد، لذا اولین جعبه را با یکی از ۳ توپ، دومین جعبه را با یکی از ۲ توپ دیگر و سومین جعبه را با ۱ توپ باقی‌مانده می‌توان پر کرد و با استفاده از قضیه ۲.۲. داریم: $۳ \times ۲ \times ۱ = ۳! = ۶$

که این تعداد، در حقیقت نشان دهنده تعداد نقاط پیشامدی از فضای نمونه S است. $\square$

حال سعی می‌کنیم تعداد تبدیل‌های r تایی از n شیء متمایز را تعیین کنیم $(r \leqslant n)$ به‌عنوان مثال اگر چهار حرف a و b و c و d را درنظر بگیریم، تعداد تبدیل‌های این چهار حرف برابر $۴!$ است، حال تعداد تبدیل‌های دوتایی ممکن از این چهار حرف را به‌دست می‌آوریم، این تبدیل‌ها عبارتند از:

ab , ac , ad , ba , bc , bd , ca , cb , cd , da , db , dc

Scanned by CamScanner

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید ۱۲ تبدیل دوتایی مختلف برای چهار حرف فوق وجود دارد، این تعداد را به کمک قضیه ۲.۲. نیز می‌توان تعیین کرد، زیرا می‌توان گفت که دو محل خالی وجود دارد که محل خالی اول با یکی از ۴ حرف پر می‌شود و محل خالی دوم باید با یکی از ۳ حرف باقی‌مانده پر شود، بنابراین این تعداد برابر است با:

$$۴ \times ۳ = ۱۲$$

قضیه ۴.۲. تعداد تبدیل‌های rتایی، $(۱ \leqslant r \leqslant n)$ از n شیء متمایز برابر است با:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (۲)$$

اثبات: r محل خالی را درنظر می‌گیریم، باید این r محل را با n شیء پرکنیم به‌طوری‌که در هر محل بیش از یک شیء قرار نگیرد. محل خالی اول را با n طریق می‌توان پر کرد، محل خالی دوم را با $(n-۱)$ و $\cdots$ و آخرین محل خالی را با $n-r+۱$ طریق می‌توان پر کرد. بنابراین با استفاده از قضیه ۲.۲. داریم:

$$P_n^r = n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)$$

رابطه بالا را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$P_n^r = n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱) \times \frac{(n-r)!}{(n-r)!}$$

در نتیجه

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \bigcirc$$

مثال ۲۶.۲. می‌خواهیم از میان ۲۰ نفر برندگان یک مسابقه، ۲ نفر را برای اعطای جوایز اول و دوم انتخاب کنیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است.

حل: با توجه به فرمول (۲) داریم:

$$P_{۲۰}^{۲} = \frac{۲۰!}{(۲۰-۲)!} = ۲۰ \times ۱۹ = ۳۸۰$$

توجه کنید که این تعداد، تعداد نقاط فضای نمونه این آزمایش است. □

مثال ۲۷.۲. از یک گروه ۱۰ نفره، چند صف ۵ نفره می‌توان تشکیل داد؟

حل: با توجه به فرمول (۲) داریم:

$$P_{۱۰}^{۵} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۵)!} = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۰۲۴۰ \qquad \square$$

مثال ۲۸.۲. چند عدد چهار رقمی از ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ می‌توان نوشت به‌طوری‌که هیچ‌کدام از ارقام تکرار نشوند؟

حل: تعداد اعداد موردنظر، برابر با تعداد تبدیل‌های ۴ تایی از ۶ شیء متمایز است، پس

$$P_۶^۴ = \frac{۶!}{(۶-۴)!} = ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = ۳۶۰ \qquad \square$$

به تبدیل‌هایی که به‌وسیله آن یک دسته از اشیاء را روی محیط دایره مرتب می‌کنیم، «تبدیل دوری» می‌گوییم. باید توجه داشت که در تبدیل دوری، اگر اشیای روی محیط دایره را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت دهیم، ترتیب جدیدی به‌دست نمی‌آید: به‌عبارت دیگر دو تبدیل در صورتی متمایز درنظر گرفته می‌شوند که هنگام حرکت در جهت عقربه‌های ساعت، اشیایی که در تبدیل، روبه‌روی یکدیگر قرار دارند با شیء دیگری جانشین شوند. به‌عنوان مثال اگر چهار نفر دو به دو با یکدیگر دوست هستند دور میزگردی بنشینند و این چهار نفر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت هر کدام یک محل تغییر مکان دهند، تبدیل جدیدی نخواهیم داشت. باید یک نفر را در یک محل ثابت نگهداریم و سه نفر دیگر جابه‌جا شوند، بنابراین به‌تعداد !۳ طریق، سایر افراد در اطراف میز جای خواهند گرفت. پس ۴ نفر به ۶ طریق مختلف می‌توانند اطراف یک میز قرار گیرند، در قضیه زیر را داریم:

قضیه ۵.۲. تعداد تبدیل‌های دوری n شیء متمایز، برابر با $(n-۱)!$ است.

اثبات: اگر یکی از n شیء را در محل ثابتی قرار دهیم، بقیه اشیای را با $(n-۱)!$ طریق می‌توانیم در سایر محل‌ها قرار دهیم و فقط در این صورت است که ترتیب‌های جدیدی داریم. ○

مثال ۲۹.۲. به چند طریق می‌توان ۵ نفر را در اطراف یک میز دایره‌ای شکل قرار داد؟

حل: با توجه به قضیه ۵.۲. داریم:

$$(n-۱)! = (۵-۱)! = ۴! = ۲۴ \qquad \square$$

تذکر: اگر ۵ نفر را در یک ردیف قرار دهیم، $۵! = ۱۲۰$ حالت مختلف وجود دارد.

مثال ۳۰.۲. به چند طریق می‌توان ۶ درخت مختلف را در محیط یک زمین دایره‌ای شکل کاشت.

حل: با توجه به قضیه ۵.۲. داریم:

$$(۶-۱)! = ۵! = ۱۲۰ \qquad \square$$

در قسمت قبل تعداد تبدیل‌های n شیء متمایز را مورد بررسی قرار دادیم، حال می‌خواهیم به بررسی این مطلب بپردازیم که اگر تعدادی از این اشیاء یکسان باشند، قضایای تبدیل به چه صورت بیان خواهد شد؟

برای روشن شدن مطلب، بحث را با یک مثال شروع می‌کنیم، سه حرف a و b و c را درنظر گرفته و فرض

می‌کنیم که $a=b=x$ باشد، بنابراین تعداد تبدیل‌ها از ۶ صورت abc,acb,bac,bca,cab,cba به سه صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\text{xxc} \quad , \quad \text{xcx} \quad , \quad \text{cxx}$$

در نتیجه می‌توان گفت در این حالت تعداد تبدیل‌های مختلف سه شیء که دوتای آن از یک نوع باشد، عبارت است از: $\frac{۳!}{۲!}=۳$

به‌همین ترتیب اگر از چهار حرف a و b و c و d داشته باشیم $a=b=x \quad , \quad c=d=y$

آن‌گاه ۲۴ حالت مختلف تبدیل این چهار شیء، به ۶ صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\text{xyxy} \quad , \quad \text{xxyy} \quad , \quad \text{yxyx} \quad , \quad \text{xyyx} \quad , \quad \text{yyxx} \quad , \quad \text{yxxy}$$

بنابراین تعداد تبدیل‌های مختلف چهار شیء که دوتای آن از یک نوع و دوتای دیگر آن از نوع دیگری باشند، برابر است با:

$$\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$$

با توجه به نتایج بحث بالا، قضیه زیر را می‌توان بیان نمود:

قضیه ۶.۲. تعداد تبدیل‌های مختلف n شیء که $n_۱$ شیء آن از نوع اول، $n_۲$ شیء آن از نوع دوم و ... و n_r شیء آن از نوع r باشد برابر است با:

$$\binom{n}{n_۱,n_۲,\cdots,n_r}=\frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_r!} \quad \text{و} \quad n_۱+n_۲+\cdots+n_r=n$$ ○

مثال ۳۱.۲. به چند طریق مختلف می‌توان سه درخت کاج، دو درخت بلوط و دو درخت سرو را در یک ردیف کاشت، به‌صورتی که درخت‌های هم نوع قابل تشخیص نباشند؟

حل: با توجه به قضیه ۶.۲. و انتخاب $n=۷$ و $n_۳=۲$ و $n_۲=۲$ و $n_۱=۳$ داریم:

$$\binom{۷}{۳,۲,۲}=\frac{۷!}{۳!۲!۲!}=۲۱۰$$ □

مثال ۳۲.۲. به چند طریق مختلف می‌توان، ۳ لامپ قرمز، ۲ لامپ سبز و ۴ لامپ آبی را روی یک صفحه نصب کرد؟

حل: با استفاده از قضیه ۶.۲. و انتخاب $n=۹$ و $n_۳=۴$ و $n_۲=۲$ و $n_۱=۳$

داریم:
$$\binom{۹}{۳, ۲, ۴} = \frac{۹!}{۳!۲!۴!} = ۱۲۶۰ \quad \square$$

در بسیاری از موارد با مسائلی مواجه می‌شویم که خواسته شده یک مجموعه n عضوی را به r زیر مجموعه، به‌گونه‌ای تقسیم کنید که اجتماع آن‌ها برابر مجموعه مفروض و اشتراک دو به دوی آن‌ها تهی باشد و هیچ‌کدام از زیر مجموعه‌ها تهی نباشند. به‌عنوان مثال اگر بخواهیم مجموعه $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را به دو زیر مجموعه به‌گونه‌ای تقسیم کنیم که زیر مجموعه اول یک عضو و زیرمجموعه دوم ۴ عضو داشته باشند. حالت‌های ممکن به صورت زیر است .

$$\{\{۱\} \text{ و } \{۲, ۳, ۴, ۵\}\} \text{ و } \{\{۲\} \text{ و } \{۱, ۳, ۴, ۵\}\} \text{ و } \{\{۳\} \text{ و } \{۱, ۲, ۴, ۵\}\} \text{ و }$$
$$\{\{۴\} \text{ و } \{۱, ۲, ۳, ۵\}\} \text{ و } \{\{۵\} \text{ و } \{۱, ۲, ۳, ۴\}\}$$

همان‌طورکه ملاحظه می‌کنید، تعداد حالت‌های مختلفی که یک مجموعه ۵ عضوی را به دوگروه می‌توان تبدیل کرد برابر با ۵ است و چون ترتیب قرارگرفتن عضوهای هر مجموعه در داخل مجموعه مهم نیست، بنابراین می‌توان گفت که تعداد حالت‌های مختلفی که یک مجموعه ۵ عضوی را می‌توان به دوگروه تقسیم کرد که در یک گروه یک عضو و درگروه دیگر چهار عضو باشد، برابر است با تعداد تبدیل‌های ۵ شیء که ۴ شیء آن از یک نوع و یک شیء از نوع دوم باشد به‌عبارت دیگر این تعداد برابر است با:
$$\binom{۵}{۱ \text{ و } ۴} = \frac{۵!}{۴!۱!} = ۵$$

این مطلب در قضیه زیر به‌صورت کلی بیان می‌شود:

قضیه ۷.۲. تعداد طریقی که می‌توان یک مجموعه n عضوی را به r دسته تقسیم نمود به‌طوری که در دسته اول $n_۱$ عضو، در دسته دوم، $n_۲$ عضو، و $\cdots$، در دسته rام n_r عضو قرارگیرد $\left(\sum_{i=۱}^{r} n_i = n\right)$ برابر است با:
$$\binom{n}{n_۱, n_۲ \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_۱!n_۲!\cdots n_r!} \qquad (۳)$$

مثال ۳۳.۲. به‌چند طریق می‌توان ۷ نفر را با سه وسیله نقلیه که به‌ترتیب گنجایش ۲، ۲ و ۳ نفر دارند، از محلی به محل دیگر منتقل نمود؟

حل: با توجه به قضیه ۷.۲. و انتخاب $n_۱ = ۲$، $n_۲ = ۲$ و $n_۳ = ۳$ داریم:
$$\binom{n}{۲, ۲, ۳} = \frac{۷!}{۲!۲!۳!} = ۲۱۰ \quad \square$$

چون در بسیاری از موارد لازم است که از میان n شیء، r شیء را بدون توجه به‌ترتیب انتخاب نمود. لذا برای بررسی این مطلب، ابتدا تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۷.۲. چگونگی انتخاب r شیء از n شیء، بدون درنظر گرفتن ترتیب، **ترکیب** نامیده می‌شود.

قضیه زیر تعداد حالت‌های مختلفی را که می‌توان r شیء را بدون درنظر گرفتن ترتیب از n شیء انتخاب نمود، بیان می‌کند.

قضیه ۸.۲. تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز برابر است با:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

اثبات: چون این قضیه حالت خاصی از قضیه ۷.۲. است که مجموعه اشیاء را به ۲ دسته تقسیم کرده‌ایم، به‌طوری که در دسته اول r عضو و در دسته دوم $n-r$ عضو قرار دارد، با توجه به‌فرمول (۳) داریم:

$$\binom{n}{r, n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

به‌طور خلاصه تعداد ترکیب‌های rتایی از n شیء متمایز را به‌صورت $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم، پس:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \bigcirc \qquad (۴)$$

مثال ۳۴.۲. از یک گروه مرکب از ۵ پزشک و ۳ پرستار، چند کمیته ۳ نفره می‌توان تشکیل داد؟

حل: این گروه جمعاً ۸ نفر عضو دارد، بنابراین تعداد کمیته‌های ۳ نفره برابر است با:

$$\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!۵!} = ۵۶ \qquad \square$$

در حقیقت این تعداد، تعداد تمام گروه‌های ۳ نفره ممکن است که می‌توان انتخاب کرد، به‌عبارت دیگر این تعداد، عضوهای فضای نمونه این آزمایش آماری است. $(n(S) = ۵۶)$

مثال ۳۵.۲. در مثال قبل، اگر بخواهیم کمیته‌های ۳ نفره، مرکب از ۲ پزشک و ۱ پرستار باشند، چند کمیته ۳ نفره می‌توان انتخاب کرد.

حل: پیشامد A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

A : پیشامدی که در آن کمیته ۳ نفره مرکب از ۲ پزشک و ۱ پرستار باشد. برای محاسبه $n(A)$ به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا تعداد ترکیب‌های ۲ تایی از ۵ پزشک را حساب می‌کنیم، سپس تعداد ترکیب‌های ۱ نفره از ۳ پرستار را به‌دست می‌آوریم و بالاخره بنا به اصل اساسی شمارش، آن‌ها را در یکدیگر ضرب می‌کنیم.

تعداد گروه‌های ۲ نفره که می‌توان از ۵ پزشک تشکیل داد $= \binom{۵}{۲}$

تعداد گروه‌های ۱ نفره که می‌توان از ۳ پرستار تشکیل داد $= \binom{۳}{۱}$

بنابراین
$$n(A) = \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱} = \frac{۵!}{۲!۳!} \times \frac{۳!}{۱!۲!} = ۳۰ \qquad \square$$

مثال ۳۶.۲. جعبه‌ای محتوی ۴ توپ قرمز، ۳ توپ سبز و ۹ توپ آبی است، به چند طریق می‌توان ۶ توپ را انتخاب کرد، به‌طوری که:

الف) محدودیتی وجود نداشته باشد.

ب) ۳ توپ قرمز، ۱ توپ سبز و ۲ توپ آبی وجود داشته باشد.

حل: الف) این حالت نشان‌دهنده تعداد عضوهای فضای نمونه این آزمایش آماری است، بنابراین

$$n(S) = \binom{۱۶}{۶} = \frac{۱۶!}{۶!۱۰!} = ۸۰۰۸$$

ب) پیشامد A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

A: پیشامد این که از ۶ توپ انتخابی، ۳ توپ قرمز، ۱ توپ سبز و ۲ توپ آبی باشد، پس

تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان ۳ توپ قرمز را از ۴ توپ قرمز انتخاب کرد $= \binom{۴}{۳}$

تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان ۱ توپ سبز را از ۳ توپ سبز انتخاب کرد $= \binom{۳}{۱}$

تعداد راه‌های مختلفی که می‌توان ۲ توپ آبی را از ۹ توپ آبی انتخاب کرد $= \binom{۹}{۲}$

و در نتیجه
$$n(A) = \binom{۴}{۳}\binom{۳}{۱}\binom{۹}{۲} = ۴ \times ۳ \times \frac{۹!}{۲!(۹-۲)!} = ۴۳۲ \qquad \square$$

مثال ۳۷.۲. از ۳ سیب قرمز، ۴ سیب زرد، به‌چند طریق می‌توان ۴ سیب انتخاب کرد، به‌طوری‌که‌از هر رنگ سیب ۲ عدد انتخاب شده باشد؟

حل: اگر A را پیشامد موردنظر تعریف کنیم، داریم:

$$\square \qquad n(A) = \binom{۳}{۲}\binom{۴}{۲} = \frac{۳!}{۲!۱!} \times \frac{۴!}{۲!۲!} = ۱۸$$

مثال ۳۸.۲. از ۱۰ دستگاه تلویزیون موجود در یک فروشگاه ۳ تلویزیون نقص فنی دارد، به‌چند طریق صاحب یک هتل می‌تواند ۴ دستگاه از این تلویزیون‌ها را خریداری کند، به‌طوری‌که‌حداقل ۲ تلویزیون نقص فنی داشته باشد؟

حل: پیشامدهای A و B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

A : پیشامد این که دقیقاً ۲ تلویزیون نقص فنی داشته باشد

B : پیشامد این که دقیقاً ۳ تلویزیون نقص فنی داشته باشد، وقتی که ۴ تلویزیون انتخاب شود. آن‌گاه $C = A \cup B$ پیشامدی است که حداقل دو تلویزیون نقص فنی داشته باشد وقتی که ۴ تلویزیون انتخاب شود. چون $A \cap B = \phi$، داریم: $\quad n(C) = n(A) + n(B)$

$$\square \qquad n(C) = \binom{۳}{۲}\binom{۷}{۲} + \binom{۳}{۳}\binom{۷}{۱} = ۳ \times ۲۱ + ۱ \times ۷ = ۷۰$$

قضیه ۹.۲. تعداد طرق تقسیم n شیء نامتمایز بین k نفر برابر است با

$$\binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{n+k-1}{n} \tag{۴}$$

و اگر بخواهیم به هر نفر حداقل یک شیء برسد

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \binom{n-1}{n-k} \tag{۵}$$

و اگر بخواهیم هر نفر حداقل r شیء داشته باشد

$$\binom{n-k(r-۱)-۱}{k-۱} \tag{۶}$$

مثال ۳۹.۲. به چند طریق می‌توان ۴۰ سیب مشابه را بین ۳ نفر تقسیم کرد؟

حل: با استفاده از فرمول (۴) داریم:

$$\square \qquad \binom{۴۲}{۲} = \frac{۴۲!}{۲!۴۰!} = ۸۶۱$$

مثال ۴۰.۲. به چند طریق می‌توان ۱۰ خودکار قرمز و ۱۵ خودکار سبز و ۸ خودکار آبی را بین ۴ نفر تقسیم کرد؟

حل: با استفاده از فرمول (۴) داریم:

$$\binom{۱۳}{۳}\binom{۱۸}{۳}\binom{۱۱}{۳} = ۴۱۷۷۱۰۴۰$$

و اگر بخواهیم هر نفر حداقل یک رنگ از هر خودکار داشته باشد، با توجه به فرمول (۵) جواب برابر است با:

$$\binom{۹}{۳}\binom{۱۴}{۳}\binom{۷}{۳} = ۱۰۷۰۱۶۰ \qquad \square$$

قضیه ۱۰.۲. تعداد طرق توزیع n شیء متمایز در k محل برابر است با:

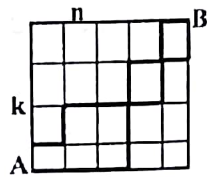
$$P^{n}_{n+k-۱} = \frac{(n+k-۱)!}{(k-۱)!} \tag{۷}$$

و اگر بخواهیم در هر محل، لااقل یک شیء قرار گیرد:

$$P^{n-k}_{n-۱} = \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!} \qquad \bigcirc \tag{۸}$$

قضیه ۱۱.۲. در شکل زیر، تعداد کل مسیرها از A به B برابر است با:

$$\frac{(n+k)!}{n!k!} \qquad \bigcirc \tag{۹}$$



مجموعه مسائل ۳.۲.

۱- چند عدد سه رقمی از ارقام ۹ و ۷ و ۶ و ۵ و ۳ و ۲ می‌توان نوشت به‌طوری‌که:

الف) تکرار ارقام مجاز نباشد. **ب)** اعداد کوچک‌تر از ۴۰۰ باشند. **پ)** چه تعدادی از اعداد زوج و چه تعدادی فرد هستند. (در حالت الف) **ت)** چند عدد مضرب ۵ هستند. (در حالت الف)

۲- به‌چند طریق ۳ مرد و ۲ زن می‌توانند در یک صف قرار گیرند، اگر

الف) محدودیتی نداشته باشیم. **ب)** مردها کنار هم و زن‌ها نیز کنار هم باشند.

پ) زن‌ها کنار هم باشند.

۳- به‌چند طریق می‌توان ۳ توپ آبی، ۴ توپ سبز، ۴ توپ قرمز و ۲ توپ سفید را در یک ردیف کنار هم قرار دارد؟

۴- از ۷ زن و ۵ مرد به‌چند طریق می‌توان کمیته‌های متشکل از ۳ زن و ۲ مرد تشکیل داد؟

۵ـ در یک امتحان ۱۰ سؤالی، دانشجو باید به ۸ سؤال پاسخ دهد. این دانشجو به‌چند طریق می‌تواند به ۸ سؤال پاسخ دهد، اگر

الف) محدودیتی نداشته باشیم. **ب)** حتماً به ۳ سؤال اول باید پاسخ دهد.

پ) بخواهد از ۵ سؤال اول، حداقل به ۴ سؤال پاسخ دهد.

۶ـ به‌چند طریق ۵ نفر می‌توانند صفی را تشکیل دهند، اگر دو نفر از آن‌ها بخواهند کنار هم باشد؟

۷ـ تمرین ۶ را برای حالتی که این پنج نفر بخواهند اطراف یک میز دایره‌ای شکل بنشینند حل کنید.

۸ـ با ۸ پرچم که ۲ تای آن‌ها قرمز، ۲ تای آن‌ها سبز و ۴ تای دیگر آبی‌رنگ هستند چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

۹ـ به‌چند طریق می‌توان ۵ کتاب آبی، ۴ کتاب قرمز و ۳ کتاب سبز را در یک قفسه کتاب جای داد اگر بخواهیم کتاب‌های هم‌رنگ کنار هم باشند؟

۱۰ـ از یک گروه شامل ۹ مرد و ۳ زن، به‌چند طریق می‌توان کمیته‌های ۴ نفره تشکیل داد؟ در صورتی که:

الف) محدودیتی نداشته باشیم. **ب)** کمیته‌ها حداقل شامل یک زن باشد.

پ) کمیته‌ها فقط شامل یک زن باشد.

۱۱ـ فرض کنید ۱۱ دوست صمیمی دارید، به‌چند طریق می‌توان ۵ نفر از آن‌ها را به مهمانی دعوت کرد اگر

الف) محدودیتی نداشته باشیم. **ب)** دو نفر از آن‌ها بخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند.

پ) دو نفر از آن‌ها با هم اختلاف داشته و نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند.

۱۲ـ ۹ خودکار را به‌چند طریق می‌توان بین ۳ دانش‌آموز به‌طور مساوی تقسیم کرد؟

۱۳ـ ۹ دانش‌آموز را به‌چند طریق می‌توان به گروه‌های ۳ نفره تقسیم کرد؟

۱۴ـ به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به کمیته‌های ۵، ۳ و ۴ نفره تقسیم نمود؟

۱۵ـ به چند طریق می‌توان از ۱۴ نفر پزشک ۶ کمیته تشکیل داد به‌طوری که دارای ۳، ۳، ۲، ۲، ۲، ۲ نفر عضو باشند؟

۱۶ـ قضیه دو جمله‌ای را ثابت کنید، یعنی نشان دهید:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

۱۷ـ نشان دهید:

الف)

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

ب) $$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$$

۱۸ـ نشان دهید:

$$(۱+۱)^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \cdots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = ۲^n$$

و از آن‌جا نتیجه بگیرید که تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n است.

۱۹ـ نشان دهید:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \cdots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \cdots$$

۲۰ـ به‌چند طریق می‌توان n مهره شبیه به هم را در m ظرف مشخص قرار داد به‌طوری‌که ظرف معینی دقیقاً محتوی k مهره باشد؟

احتمال

۱.۳. احتمال

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، آزمایش تصادفی، آزمایشی است که نتیجه آن از قبل مشخص نباشد، یکی از اساسی‌ترین کارهای آمارگر، نتیجه‌گیری و استنباط از آزمایش‌های تصادفی است. برای رسیدن به‌چنین هدفی و استخراج نتایج دقیق و مستدل (نه حدس و گمان) دانستن نظریه احتمال ضروری است. به‌طور کلی اصطلاح احتمال مربوط به‌وقوع پیشامدهای تصادفی است.

هر کدام از ما روزانه جملاتی از قبیل، احتمالاً تیم A در مسابقه برنده می‌شود و یا احتمالاً در این کار موفق می‌شوم و یا شانس پیروزی کاندید A برابر ۷۰ درصد است را به‌زبان می‌آوریم. حال ببینیم منظورمان از بیان این جملات چیست و چگونه این جملات را مثلاً با ضریبی مانند ۷۰ درصد بیان می‌کنیم. اگر به جملات فوق توجه کنیم، هر کدام از آن‌ها نشان دهنده یک آزمایش تصادفی است و چون جواب آن‌ها به‌طور قطع مشخص نیست، بنابراین با حدس‌های شخصی و یا اطلاعاتی که از قبل در مورد این‌گونه آزمایش‌ها داریم، جملاتی نظیر آنچه ذکر شد را بیان می‌کنیم. در حقیقت به هر نقطه از فضای نمونه آزمایش مورد نظر عددی را نسبت می‌دهیم، مثلاً وقتی می‌گوییم شانس پیروز شدن تیم A، ۹۰٪ است، فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر داریم:

$$S = \{\text{شکست، پیروزی}\}$$

که به پیروزی تیم A عدد ۹۰ و به شکست این تیم عدد ۱۰ را نسبت می‌دهیم.

در نظریه احتمالات هم با پیروی از همین روش، به هر نقطه از فضای نمونه متناهی عددی را نسبت می‌دهیم که وزن آن نقطه نامیده می‌شود. این وزن را معمولاً با ω نشان داده و به‌گونه‌ای است که از صفر تا ۱ تغییر می‌کند و هر مقدار آن تعیین کننده درجه درست نمایی یک پیشامد در یک آزمایش تصادفی است و همواره مجموع وزن کلیه نقاط فضای نمونه برابر ۱ است . اگر احتمال وقوع پیشامدی زیاد باشد برای این

پیشامد عدد نسبت داده شده را نزدیک به ۱ انتخاب می‌کنیم و اگر امکان وقوع پیشامدی ناچیز باشد عدد را نزدیک به صفر انتخاب می‌کنیم.

در بسیاری از آزمایش‌ها شانس وقوع تمام نقاط فضای نمونه یکسان فرض می‌شود و بنابراین برای آن‌ها وزن‌های مساوی در نظر گرفته می‌شود و برای نقاط خارج از فضای نمونه وزن صفر را درنظر می‌گیریم.

با توجه به مقدمه‌ای که در بالا اشاره شد، احتمال هر پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳ . مجموع وزن‌های تمام نقاط موجود در پیشامد A را «**احتمال پیشامد A**» می‌گوییم و آن‌را با نماد $P(A)$ یا $P_r(A)$ نشان می‌دهیم[۱].

با توجه به تعریف پیشامد A، داریم:

۱ـ $P(\phi) = 0$ (احتمال یک پیشامد غیرممکن برابر صفر است)

۲ـ $P(S) = 1$ (احتمال یک پیشامد قطعی برابر یک است)

۳ـ $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

تذکر: باید توجه داشت که در عمل، پیشامد غیرممکن وجود نداشته، و پیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها به‌صفر نزدیک باشد، به‌عنوان پیشامد غیرممکن درنظر گرفته می‌شود، به‌همین ترتیب پیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها به ۱ نزدیک باشد، به‌عنوان پیشامدهای قطعی تلقی خواهد شد. به‌عنوان مثال اگر در عمل، احتمال وقوع پیشامدی را محاسبه کرده و این احتمال برابر $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$ باشد، این پیشامد قابل اغماض بوده و به‌عنوان پیشامدی غیر ممکن تلقی می‌شود، در قسمت‌های بعد درباره با پیشامدهای قابل اغماض و متمم آن‌ها، پیشامدهای قطعی و چگونگی ارتباط آن‌ها بیش‌تر بحث خواهد شد.

فرض کنید آزمایشی را انجام داده و پیشامدهای ممکن آن به‌صورت زیر باشد:

$$A_1, A_2, \cdots, A_n$$

تعریف ۲.۳. پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n را **پیشامدهای ناسازگار** می‌گوییم اگر وقوع هم‌زمانی هر دو پیشامدی، غیر ممکن باشد، به‌عبارت دیگر

$$A_i \cap A_j = \phi \quad i \neq j \ , \ 1 \leqslant i \ , \ j \leqslant n$$

و در نتیجه

$$P(A_i \cap A_j) = 0$$

تعریف ۳.۳. اگر پیشامدهای A_1، A_2، $\cdots$، A_n همه نتایج ممکن را در برگیرند، یعنی امکان نداشته باشد

که در اثر آزمایش هیچ‌کدام از A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n رخ ندهد، در این صورت پیشامدها را **فرسا** می‌گوییم .

تعریف ۴.۳. اگر شرایط آزمایش به‌گونه‌ای باشد که احتمال وقوع هر یک از پیشامدهای A_1 و A_2 و $\cdots$ و A_n برابر باشند، در این صورت پیشامدها را **هم‌تراز** یا **هم‌شانس** می‌گوییم .

تعریف ۵.۳. اگر پیشامدهای A_1، A_2، $\cdots$، A_n هر سه خاصیت، ناسازگار، فرسا و هم‌ترازی داشته باشند، در نظریه احتمال آن‌ها را **حالت‌ها** یا **شانسها** نامیده و می‌گوییم ، توسط **مدل کلاسیک** بیان می‌شوند.

به‌عنوان مثال اگر بگوییم در پرتاب یک تاس سالم شش حالت به‌وقوع می‌پیوندد، منظور ما شش پیشامد ناسازگار، فرسا و هم‌تراز است که این شش حالت عبارتند از:

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$$

مثلاً A_4 نشان دهنده عدد ۴ است .

مثال ۱.۳. پیشامدهای حاصل از پرتاب دو سکه سالم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$\boldsymbol{A_1}$: پیشامد رخ دادن دو شیر

$\boldsymbol{A_2}$: پیشامد رخ دادن دو خط

$\boldsymbol{A_3}$: پیشامد رخ دادن یک شیر و یک خط

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که این پیشامدها هم‌تراز نیستند. زیرا مثلاً شانس وقوع A_3 دو برابر شانس وقوع A_1 یا A_2 است، ولی اگر پیشامدهای حاصل از پرتاب دو سکه سالم را به‌صورت زیر درنظر بگیریم:

$\boldsymbol{A_1}$: پیشامد رخ دادن سکه اول شیر و سکه دوم خط

$\boldsymbol{A_2}$: پیشامد رخ دادن سکه اول خط و سکه دوم شیر

$\boldsymbol{A_3}$: پیشامد رخ دادن دو شیر

$\boldsymbol{A_4}$: پیشامد رخ دادن دو خط

واضح است که پیشامدهای فوق، فرسا، ناسازگار و هم‌تراز هستند. □

تعریف ۶.۳. (احتمال پیشامد A)

اگر یک آزمایش را بتوان توسط مدل کلاسیک بیان نمود، در این صورت احتمال هر پیشامد A در این آزمایش برابر است با

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{n}{N} \qquad (1)$$

که در آن n، تعداد حالت‌های مساعد پیشامد A و N تعداد کل حالت است.

تذکر: در نظریه احتمال، همواره سعی می‌شود که فضای نمونه آزمایش، به‌گونه‌ای مطرح شود که پیشامدهای ممکن به‌صورت حالت‌ها (هم‌تراز، فرسا و ناسازگار) بیان شوند.

مثال ۲.۳. سکه سالمی را ۳ مرتبه پرتاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال این که دقیقاً یکبار شیر مشاهده شود.

حل: چون سکه سالم است، بنابراین به هر نقطه از فضای نمونه $S_۱ = \{H, T\}$ وزن ω را نسبت می‌دهیم، داریم:

$$P(S_۱) = ۱$$

$$P(H) + P(T) = ۱ \Rightarrow \omega + \omega = ۱ \Rightarrow \omega = \frac{۱}{۲}$$

یعنی برای سکه سالم، احتمال‌ها مساوی و احتمال آمدن شیر یا خط هرکدام $\frac{۱}{۲}$ است. حال اگر این سکه سالم را ۳ مرتبه پرتاب کنیم، بنا به اصل اساس شمارش، فضای نمونه این آزمایش دارای ۸ نقطه نمونه به‌صورت زیر است .

$$S = \{\mathrm{TTT}\ ,\ \mathrm{TTH}, \mathrm{THT}\ ,\ \mathrm{HTT}\ ,\ \mathrm{THH}\ ,\ \mathrm{HTH}\ ,\ \mathrm{HHT}\ ,\ \mathrm{HHH}\}$$

حال اگر A را پیشامد آمدن فقط یک شیر تعریف کنیم، داریم:

$$A = \{\mathrm{THT}\ ,\ \mathrm{TTH}\ ,\ \mathrm{HTT}\}$$

و چون احتمال هر نقطه از فضای نمونه S، برابر با $\left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$ یا $\frac{۱}{۸}$ است ، لذا با توجه به تعریف ۱.۳. داریم:

$$P(A) = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

و اگر از تعریف ۶.۳. استفاده کنیم، همین نتیجه را خواهیم گرفت زیرا

$$\square \qquad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۸}$$

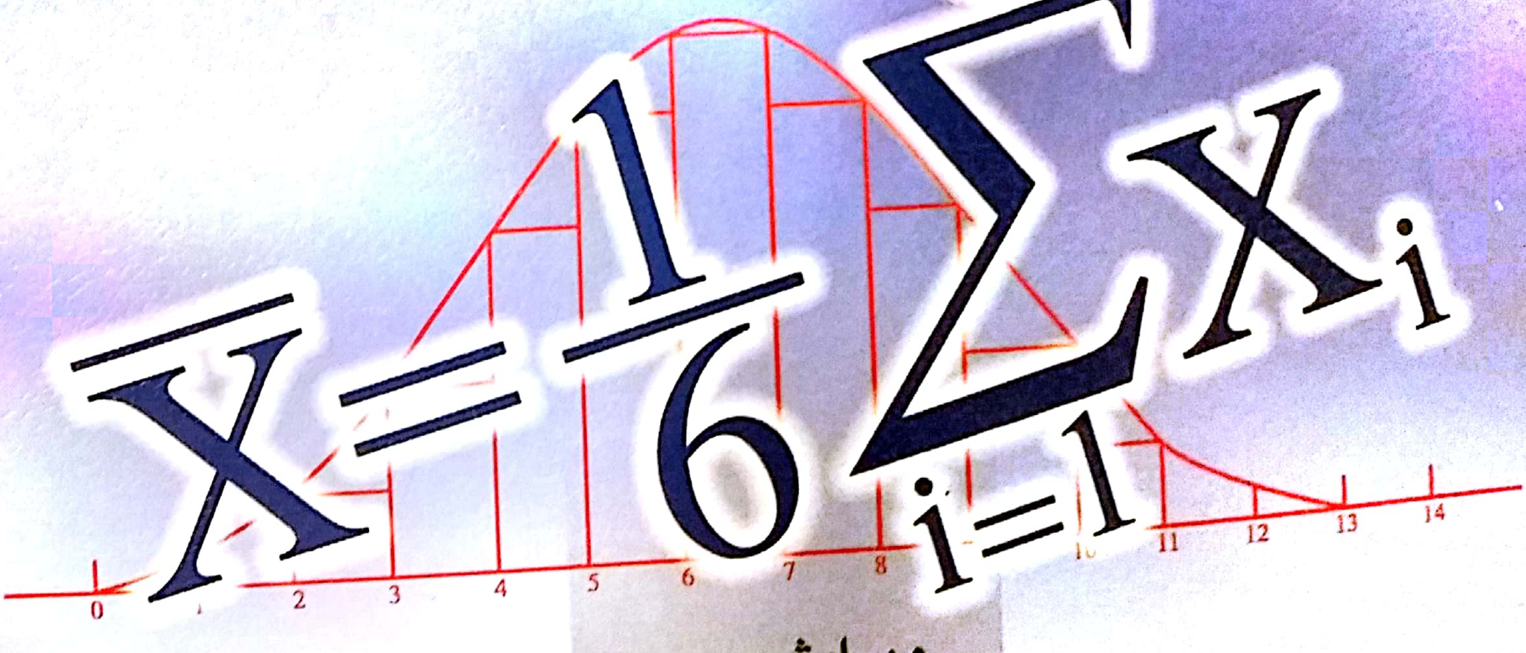
آمار و احتمالات کاربردی

چاپ شانزدهم

دکتر مسعود نیکوکار

دکتر بهمن عربزاده

اعضاء هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)



$$\overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i$$

ویرایش جدید